Notes de cours : équations différentielles linéaires

$\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (assimilié à $\mathbb{K}^n$),
$A: \ I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $B: \ I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux fonction continues.

Alors le problème de Cauchy : $\quad$ (C.L.) $\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) & \text{pour tout } t \in I \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

admet une et une seule solution X sur l'intervalle I.

Démonstration.

Il est évident que X est solution de (C.L.) sur I si et seulement si $X(t) = X_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \big(A(u)X(u) + B(u)\big)\mathrm{d}u$ pour tout t de I.

▶ Unicité.

Preuve 1. Supposons que X et Y sont deux solutions de (C.L.) sur I.
Soit $||.||$ une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $|||.|||$ une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors : $\quad \forall t \in I, \quad X(t) - Y(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} A(u)\big(X(u) - Y(u)\big)\mathrm{d}u$, et :

$$||X(t) - Y(t)|| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} ||A(u)\big(X(u) - Y(u)\big)||\mathrm{d}u \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |||A(u)|||.||X(u) - Y(u)||\mathrm{d}u \right|$$

Pour $t \in I$, on note $u(t) = ||X(t) - Y(t)||, \ \alpha(t) = |||A(t)|||$ et $v(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \alpha(s)u(s)\mathrm{d}s$,

$C(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \alpha(s)\mathrm{d}s$ et $g(t) = e^{-|C(t)|}v(t) = \begin{cases} e^{-C(t)}v(t) & \text{si } t \geqslant t_0 \\ e^{C(t)}v(t) & \text{si } t < t_0 \end{cases}$.

On a (voir ci-dessus) : $\quad u(t) \leqslant |v(t)| = \begin{cases} v(t) & \text{si } t \geqslant t_0 \\ -v(t) & \text{si } t < t_0 \end{cases}$, puis :

$v'(t) = \alpha(t)u(t) \leqslant \alpha(t)|v(t)| = \begin{cases} \alpha(t)v(t) & \text{si } t \geqslant t_0 \\ -\alpha(t)v(t) & \text{si } t < t_0 \end{cases}$ $\quad$ et $\quad g'(t) = \begin{cases} e^{-C(t)}\big(v'(t) - \alpha(t)v(t)\big) \leqslant 0 & \text{si } t \geqslant t_0 \\ e^{C(t)}\big(v'(t) + \alpha(t)v(t)\big) \leqslant 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases}$.

La fonction g est donc décroissante sur I et comme $g(t_0) = 0$, alors : $\begin{cases} g(t) \geqslant 0 & \text{si } t \leqslant t_0 \\ g(t) \leqslant 0 & \text{si } t \geqslant t_0 \end{cases}$,

d'où : $\quad \begin{cases} v(t) \geqslant 0 & \text{si } t \leqslant t_0 \\ v(t) \leqslant 0 & \text{si } t \geqslant t_0 \end{cases}$ et $u(t) = |v(t)| = \begin{cases} -v(t) & \text{si } t \geqslant t_0 \\ v(t) & \text{si } t \leqslant t_0 \end{cases}$ est toujours négative,

soit : $\quad \forall t \in I, \ ||X(t) - Y(t)|| = u(t) \leqslant 0 \Longrightarrow ||X(t) - Y(t)|| = 0$ et donc $X(t) = Y(t)$ pour tout $t \in I$:
les deux fonctions X et Y sont donc égales, ce qui prouve l'unicité d'une solution, si elle existe.

Preuve 2. Supposons que X et Y sont deux solutions de(C.L.) sur I.
Soit $t \in I$ et $[a;b]$ un segment inclus dans I et contenant t_0 et t.
Soit $||.||$ une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $|||.|||$ une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $M = \max\limits_{u\in[a;b]} \big(|||A(u)|||\big)$ et $||X||_{[a;b]} = \max\limits_{u\in[a;b]} \big(||X(u)||\big)$.

Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\quad ||X(t)-Y(t)|| \leqslant \dfrac{M^p|t-t_0|^p}{p!}||X-Y||_{[a;b]}$.

<u>Initialisation :</u> par définition de $||.||_{[a;b]}$, $||X(t)-Y(t)|| \leqslant ||X-Y||_{[a;b]} = \dfrac{M^0|t-t_0|^0}{0!}||X-Y||_{[a;b]}$.
<u>Hérédité :</u> supposons la propriété vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} ||X(t)-Y(t)|| = \Big|\int_{t_0}^t A(u)\big(X(u)-Y(u)\big)\mathrm{d}u\Big| &\leqslant \Big|\int_{t_0}^t ||A(u)\big(X(u)-Y(u)\big)||\mathrm{d}u\Big| \\ &\leqslant \Big|\int_{t_0}^t |||A(u)|||.||X(u)-Y(u)||\mathrm{d}u\Big| \leqslant M\Big|\int_{t_0}^t ||X(u)-Y(u)||\mathrm{d}u\Big| \\ &\leqslant M\Big|\int_{t_0}^t \frac{M^p|u-t_0|^p}{p!}||X-Y||_{[a;b]}\mathrm{d}u\Big| \leqslant \frac{M^{p+1}}{p!}||X-Y||_{[a;b]}\Big|\int_{t_0}^t |u-t_0|^p\mathrm{d}u\Big| \end{aligned}$$

Or :

- Si $t \geqslant t_0$: $\quad \Big|\displaystyle\int_{t_0}^t |u-t_0|^p\mathrm{d}u\Big| = \int_{t_0}^t (u-t_0)^p\mathrm{d}u = \Big[\frac{(u-t_0)^{p+1}}{p+1}\Big]_{t_0}^t = \frac{(t-t_0)^{p+1}}{p+1} = \frac{|t-t_0|^{p+1}}{p+1}$
- Si $t < t_0$: $\quad \Big|\displaystyle\int_{t_0}^t |u-t_0|^p\mathrm{d}u\Big| = -\int_{t_0}^t (t_0-u)^p\mathrm{d}u = \Big[\frac{(t_0-u)^{p+1}}{p+1}\Big]_{t_0}^t = \frac{(t_0-t)^{p+1}}{p+1} = \frac{|t-t_0|^{p+1}}{p+1}$.

D'où : $\quad ||X(t)-Y(t)|| \leqslant \dfrac{M^{p+1}}{(p+1)!}|t-t_0|^{p+1}||X-Y||_{[a;b]}$, et la propriété est héréditaire.

Par conséquent : $\quad ||X(t)-Y(t)|| \leqslant \dfrac{M^p(b-a)^p}{p!}||X-Y||_{[a;b]}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, et comme la suite $\Big(\dfrac{M^p(b-a)^p}{p!}||X-Y||_{[a;b]}\Big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $||X(t)-Y(t)|| = 0 \iff X(t) = Y(t)$, et ceci pour tout $t \in I$.
Les deux fonctions X et Y sont donc égales, ce qui prouve l'unicité d'une solution, si elle existe.

Existence.

► On suppose pour commencer que I est un segment $[a;b]$. On note $E = \mathcal{C}\big([a;b], \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big)$, et on sait que $\big(E, ||\cdot||_{[a;b]}\big)$ est un espace de Banach.
Pour $y \in E$, la fonction $\varphi_y : \begin{array}{l} [a;b] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto X_0 + \displaystyle\int_{t_0}^t \big(A(u)y(u)+B(u)\big)\mathrm{d}u \end{array}$ est continue (i.e. $\varphi_y \in E$).
Soit alors l'application $\varphi : \begin{array}{l} E \to E \\ y \mapsto \varphi_y \end{array}$.

Soit $y, z \in E$ et $t \in [a;b] = I$. Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$||\varphi^p(y)(t) - \varphi^p(z)(t)|| \leqslant \frac{M^p|t-t_0|^p}{p!}||y-z||_{[a;b]}$$

<u>Initialisation :</u> $||\varphi^0(y)(t) - \varphi^0(z)(t)|| = ||y(t)-z(t)|| \leqslant^| |y-z||_{[a;b]} = \dfrac{M^0|t-t_0|^0}{p!}||y-z||_{[a;b]}$.
<u>Hérédité :</u> Supposons la propriété vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} ||\varphi^{p+1}(y)(t) - \varphi^{p+1}(z)(t)|| = \Big|\Big|\int_{t_0}^t A(u)\big(\varphi^p(y)(u)-\varphi^p(z)(u)\big)\mathrm{d}u\Big|\Big| &\leqslant \Big|\int_{t_0}^t ||A(u)\big(\varphi^p(y)(u)-\varphi^p(z)(u)\big)||\mathrm{d}u\Big| \\ &\leqslant \Big|\int_{t_0}^t |||A(u)|||.||\varphi^p(y)(u)-\varphi^p(z)(u)||\mathrm{d}u\Big| \leqslant M\Big|\int_{t_0}^t ||\varphi^p(y)(u)-\varphi^p(z)(u)||\mathrm{d}u\Big| \end{aligned}$$

$$\leqslant M\int_{t_0}^{t}\frac{M^p|u-t_0|^p}{p!}||y-z||_{[a;b]}\mathrm{d}u \leqslant \frac{M^{p+1}}{p!}||y-z||_{[a;b]}\Big|\int_{t_0}^{t}|u-t_0|^p\mathrm{d}u\Big|$$

Les mêmes calculs que dans la preuve de l'unicité font alors apparaître : $\Big|\displaystyle\int_{t_0}^{t}|u-t_0|^p\mathrm{d}u\Big| = \dfrac{|t-t_0|^{p+1}}{p+1}$, donc :

$$||\varphi^{p+1}(y)(t)-\varphi^{p+1}(z)(t)|| \leqslant \frac{M^{p+1}|t-t_0|^{p+1}}{(p+1)!}.||y-z||_{[a;b]}$$

La propriété est donc héréditaire, et finalement vraie pour tout $p\in\mathbb{N}$, et par conséquent :

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad ||\varphi^p(y)(t)-\varphi^p(z)(t)|| \leqslant \frac{M^p(b-a)^p}{p!}||y-z||_{[a;b]}$$

Comme la suite $\left(\dfrac{M^p(b-a)^p}{p!}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors il existe $p_0\in\mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{M^{p_0}(b-a)^{p_0}}{p_0!}\leqslant\dfrac{1}{2}$, ce qui implique : $\quad ||\varphi^{p_0}(y)-\varphi^{p_0}(z)||_{[a;b]}\leqslant\dfrac{1}{2}||y-z||_{[a;b]}$.

L'application φ^{p_0} est donc contractante ; comme de plus $\big(E,||\cdot||_{[a;b]}\big)$ est un espace complet, alors par un corollaire du théorème du point fixe de Picard, l'application φ possède un unique point fixe dans E :

$\exists! X\in E;\ \varphi(X)=X$, il existe donc une unique application $X:\ [a;b]\mapsto\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que pour tout $t\in[a;b]=I$, on ait $X(t)=X_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t}\big(A(u)X(u)+B(u)\big)\mathrm{d}u$, et donc telle que :

$$\begin{cases} X'(t)=A(t)X(t)+B(t) \text{ pour tout } t\in[a;b]=I \\ X(t_0)=X_0 \end{cases}$$

Ainsi X est l'unique solution de (C.L.) sur $I=[a;b]$.

► Traitons maintenant le cas d'un intervalle I quelconque. Pour $[a;b]$ un segment inclus dans I et contenant t_0, on note $X_{[a;b]}$ l'unique solution de (C.L.) sur $[a;b]$.

Soit $t\in I, [a_1;b_1]$ et $[a_2;b_2]$ deux segments inclus dans I et contenant t_0 et t, et soit $[a,b]=[a_1;b_1]\cap[a_2;b_2]$.

La restriction X_i ($i\in\{1;2\}$) de $X_{[a_i;b_i]}$ sur $[a;b]$ est une solution de (C.L.) sur $[a,b]$: par unicité d'une telle solution sur $[a;b]$, on a donc $X_1=X_2$ et donc $X_{[a_1;b_1]}(t)=X_1(t)=X_2(t)=X_{[a_2;b_2]}(t)$.

Ainsi : $\big\{X_{[\alpha;\beta]}(t)$ où $t\in I$ et $[\alpha;\beta]$ est un segment de I contenant t_0 et $t\big\}$, est un singleton : on note $X(t)$ son unique élément.

Il est alors clair que la fonction $X:\ \begin{array}{l} I\to\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t\mapsto X(t)\end{array}$ est une solution de C.L. sur I $\square$

Corollaire

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont l'intérieur est non vide, $A:\ I\mapsto\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une fonction continue ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit l'équation $(\mathcal{H}):\ X'(t)=A(t)X(t)$ pour tout $t\in I$.

Alors l'ensemble $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ des solutions de $(\mathcal{H})$ sur I, est un espace vectoriel de dimension n.

Démonstration.

La matrice nulle $O_{n,1}$ appartient clairement à $\mathcal{S}_\mathcal{H}$, lequel est donc non vide.

Soit $\lambda\in\mathbb{K},\ X$ et Y éléments de $\mathcal{S}_\mathcal{H}$: pour tout $t\in I$,

$\lambda X'(t)+Y'(t)=\lambda.A(t)X(t)+A(t)Y(t)=A(t)\big(\lambda X(t)+Y(t)\big)$, donc $\lambda X+Y$ appartient à $\mathcal{S}_\mathcal{H}$.

Ainsi, $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1\big(I,\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big)$.

Maintenant, soit $t_0\in I$ et $\varphi_{t_0}:\ \begin{array}{l}\mathcal{S}_\mathcal{H}\to\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X\mapsto X(t_0)\end{array}$: il est évident que φ est linéaire, et le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que φ_{t_0} est bijective : il s'agit donc d'un isomorphisme de $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et par conséquent :

$$\dim(\mathcal{S}_\mathcal{H})=\dim\big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big)=n$$

Définition : Wronskien

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $A : \begin{array}{l} I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t \mapsto A(t) \end{array}$ une fonction continue ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Soit le système différentiel homogène $(\mathcal{H})$ défini par $X'(t) = A(t)X(t)$ pour tout $t \in I$.

On note $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$ sur I et soient $X_1, \cdots, X_n$ des solutions de $(\mathcal{H})$.

On appelle **Wronskien** de $(X_1, \cdots, X_n)$ l'application

$$W : \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto \det\big(X_1(t), \cdots, X_n(t)\big) \end{array}$$

Lemme

Soient $X_1, \cdots, X_n \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \det(X_1, \cdots, X_{i-1}, AX_i, X_{i+1}, \cdots, X_n) = \operatorname{tr}(A) \cdot \det(X_1, \cdots, X_n)$$

Démonstration :

Il est évident que l'application $\varphi : \begin{array}{l} (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^n \to \mathbb{K} \\ (X_1, \cdots, X_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \det(X_1, \cdots, X_{i-1}, AX_i, X_{i+1}, \cdots, X_n) \end{array}$

est une forme $n-$linéaire alternée, d'où il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi(X_1, \cdots, X_n) = \lambda \det(X_1, \cdots, X_n)$

avec $\lambda = \varphi(e_1, \cdots, e_n) = \sum \det(e_1, \cdots, Ae_i, \cdots, e_n)$ or $Ae_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$.

Il vient alors $\det(e_1, \cdots, Ae_i, \cdots, e_n) = a_{ii}$ et donc $\lambda = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{tr}(A)$ $\square$

Proposition

Soit $t_0 \in I$; alors $\forall t \in I :\quad W(t) = \exp\left(\displaystyle\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(u))\,\mathrm{d}u\right) \cdot W(t_0)$.

Et donc : $\quad W(t_0) \neq 0 \iff W(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Démonstration :

Par dérivation de la fonction Wronskien, il vient pour tout $t \in I$:

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(X_1(t), \cdots, X_i'(t), \cdots, X_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \det(X_1(t), \cdots, AX_i(t), \cdots, X_n(t)) = \operatorname{tr}(A).W(t)$$

Par résolution de $W'(t) = \operatorname{tr}(A(t)).W(t)$, on en déduit : $\quad W(t) = \exp\left(\displaystyle\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(u))\,\mathrm{d}u\right) \cdot W(t_0)$ $\square$

Définitions

1. On dit que n solutions $X_1, \cdots, X_n$ de $(\mathcal{H})$ forment un **système fondamental** de $(\mathcal{H})$ si $W(t_0) \neq 0$ où W est le Wronskien de $(X_1, \cdots, X_n)$.
2. On appelle **matrice fondamentale** de $(\mathcal{H})$ toute matrice $M = (X_1, \cdots, X_n)$ où $(X_1, \cdots, X_n)$ est un système fondamental de $(\mathcal{H})$.

Remarques :

1. M est une matrice fondamentale de $(\mathcal{H})$ ssi pour tout $t \in I$, $\begin{cases} M'(t) = A(t) \cdot M(t) \\ \textit{et} \\ M(t) \text{ est inversible} \end{cases}$

2. Soit M une matrice fondamentale de $(\mathcal{H})$ alors $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{M.\Lambda |\ \Lambda \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})\}$.

   Plus précisément : $\quad \forall X \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}, \quad X(t) = M(t).\big(M(t_0)\big)^{-1} X_0$ pour tout $t \in I$ et $X_0 = X(t_0)$.

3. M_1 et M_2 sont deux matrices fondamentales de $(\mathcal{H})$ si et seulement s'il existe une matrice B inversible telle que $M_1(t) = M_2(t)B$ pour tout $t \in I$.

Démonstration :

1. $(\Rightarrow)\quad M'(t) = (X_1'(t), \cdots, X_n'(t)) = (A(t)X_1(t), \cdots, A(t = X_n(t)) = A(t)\big(X_1(t), \cdots, X_n(t)\big) = A(t)M(t)$

   $W(t) = \exp\Big(\displaystyle\int_{t_0}^{t} A(u)\,\mathrm{d}u\Big) W(t_0) \neq 0$ donc $M(t)$ est inversible pour tout $t \in I$.

   $(\Leftarrow)\quad M'(t) = AM(t) \iff (X_1'(t), \cdots, X_n'(t)) = (A(t)X_1(t), \cdots, AX_n(t))$.
   Donc pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et pour tout $t \in I$, $\quad X_i'(t) = A(t)X_i(t)$ et de plus $W(t_0) = \det(M(t_0)) \neq 0$.

2. Soit $X \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$: comme $(X_1, \cdots, X_n)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ alors $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

   $X(t) = \lambda_1 X_1(t) + \cdots + \lambda_n X_n(t)$, donc $X(t) = (X_1(t), \cdots, X_n(t)) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ noté $M(t) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = M(t)\Lambda$.

   De plus $X_0 = X(t_0) = M(t_0)\Lambda$, donc $\Lambda = M(t_0)^{-1}X_0$. Il vient : $\quad X(t) = M(t)M^{-1}(t_0)X_0$

3. D'après ce qui précède : $\quad X(t) = M_1(t)M_1(t_0)^{-1}.X_0 = M_2(t)M_2(t_0)^{-1}X_0$, donc :

   $M_1(t)M_1(t_0)^{-1} = M_2(t)M_2(t_0)^{-1} \Rightarrow M_2(t) = M_1(t)\left[M_1(t_0)^{-1}M_2(t_0)\right] = M_1(t) \cdot B$
   où $B = M_1(t_0)^{-1}M_2(t_0)$ est inversible.

Corollaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors le système différentiel homogène $X'(t) = A \cdot X(t)$ à coefficients *constants* a pour ensemble solution :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{e^{tA}\Lambda, \quad \Lambda \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})\right\}$$

Démonstration :

$M(t) = e^{tA} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et par dérivation et définition de l'exponentielle de matrice :

$$M'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} k.A\frac{(tA)^{k-1}}{k!} = A\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(tA)^{k-1}}{(k-1)!}\right) = Ae^{tA} = AM(t)$$

Ainsi d'après par la remarque (1), e^{tA} est une matrice fondamentale pour $(\mathcal{H})$ et donc $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{e^{tA}\Lambda,\, \Lambda \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})\right\}$.

Méthode de variation des constantes

Soit I un intervalle réel d'intérieur non vide, $t_0 \in I$ et $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ deux fonctions continues.
Soit (S) le système différentiel linéaire : $\quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ et $(\mathcal{H})$ le système différentiel homogène associé $(\mathcal{H})$: $\quad X'(t) = A(t)X(t)$.

On suppose que l'on a résolu le système $(\mathcal{H})$, notons $M(t)$ une de ses matrices fondamentales. On souhaite résoudre le système (S) :

Soit X une solution de (S) et $\Lambda :\ t \mapsto (M(t))^{-1}X(t)$, alors Λ est de classe C^1 et on a pour tout $t \in I$:

$X(t) = M(t)\Lambda(t)$, puis $X'(t) = M'(t)\Lambda(t) + M(t)\Lambda'(t) = A(t)M(t)\Lambda(t) + M(t)\Lambda'(t) = A(t)X(t) + M(t)\Lambda'(t)$.

Or par $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, il vient : $\quad M(t)\Lambda'(t) = B(t) \Rightarrow \Lambda'(t) = M^{-1}(t)B(t)$.

Ainsi Λ est obtenu par simple calcul de primitives.

▶ **Exemple :**

Résoudre le système : $\begin{cases} x'(t) = x_2(t) + 1 \\ x_2'(t) = x_1(t) - t \end{cases}$: Ici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$

Équations différentielles linéaires d'ordre n

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont l'intérieur $\mathring{I}$ est non vide, $t_0 \in I$, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ éléments de $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b : \ I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.

Alors il existe une unique solution $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ à l'équation différentielle :

$$(E) : \begin{cases} x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t).x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t).x'(t) + a_0(t).x(t) = b(t) \text{ pour tout } y \in I \\ x(t_0) = x_0, \ x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

Démonstration :

▶ **Existence.**

Pour tout t de I, soit $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, il existe une unique solution au système linéaire :

$$\text{(C.L.)} : \begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (t \in I) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

On note : $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a alors, pour tout $t \in I$:

$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + B(t)$ et $X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$, donc par identification des coefficients et pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \ x_2'(t) = x_3(t), \ldots, x_{n-1}'(t) = x_n(t) \text{ et} \\ x_n'(t) = -a_0(t)x_1(t) - a_1(t)x_2(t) - \ldots - a_{n-1}(t)x_n(t) + b(t) \end{cases}$$

Par conséquent : $x_1''(t) = x_2'(t) = x_3(t)$, etc... et : $x^{(n-1)}(t) = x_{n-1}'(t) = x_n(t)$, donc :

$$\forall t \in I, \quad x_n'(t) = x_1^{(n)}(t) = -a_0(t)x_1(t) - a_1(t)x_1'(t) - \ldots - a_{n-1}(t)x_1^{(n-1)}(t) + b(t)$$

soit : $x_1^{(n)}(t) + a_{n-1}(t).x_1^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x_1'(t) + a_0(t)x_1(t) = b(t)$

et $x_1(t_0) = x_0,\ x_1'(t_0) = x_2(t_0) = x_1, \ldots, x_1^{(n-1)}(t_0) = x_n(t_0) = x_{n-1}$.

On en déduit que la fonction x_1 est une solution de l'équation (E).

▶ **Unicité.**

Soit x une solution de (E) : on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$. Alors $X(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = X_0$

et pour tout $t \in I$:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ -a_0(t)x(t) - \ldots - a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + b(t) \end{pmatrix} = A(t)X(t) + B(t)$$

Si y est une autre solution de (E), alors de même $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ est solution du même problème de Cauchy linéaire : par unicité d'une telle solution on a alors $Y = X$ ce qui implique immédiatement $x = y$ □

Corollaire

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont l'intérieur $\mathring{I}$ est non vide, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b : \ I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.

Alors l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation (E_0) : $\quad x_0^{(n)}(t) + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x_0^{(i)}(t) = 0 \quad (t \in I)$

est un espace vectoriel de dimension n, et l'ensemble des solutions de l'équation

(E) : $x_0^{(n)}(t-) + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x_0^{(i)}(t) = b(t) \quad (t \in I)$ est l'espace affine $y + \mathcal{S}_0$ où y est une solution particulière de (E).

Démonstration.

Il est évident que $\mathcal{S}_f$ est un espace vectoriel et que l'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathcal{S}_0 \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \\ x \mapsto \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'où :

$$\dim(\mathcal{S}_0) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = n$$

De plus : si y est une solution particulière de (E) et z une solution quelconque de (E), alors $z - y$ appartient à $\mathcal{S}_0$, donc $z \in y + \mathcal{S}_0$.

Méthode de variation de la constante pour l'équation (E).

On suppose qu'on a trouvé une base $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{S}_0$. On sait alors que si on pose $X_i = \begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \\ \vdots \\ x_i^{(n-1)} \end{pmatrix}$, la famille $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de solutions de l'équation $(\mathcal{H})$: $X'(t) = A(t)X(t)$ et donc : $M(t) = \big(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)\big)$ est une matrice fondamentale de $(\mathcal{H})$.

Les solutions de l'équation $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ sont donc de la forme $M(t)\Lambda(t)$ (soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)X_i(t)$) avec $M(t)\Lambda'(t) = B(t)$, ce qui équivaut à :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)x_i^{(k)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n-2 \\ b(t) & \text{si } k = n-1 \end{cases}$$

et les solutions (E) sont donc les fonctions de la forme : $t \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)x_i(t)$ où les fonctions λ_i sont les solutions des équations juste ci-dessus.

Exemple :

Résoudre sur $]0;\pi[$ l'équation différentielle : $x''(t) + x(t) = \mathrm{cotan}(t)$.